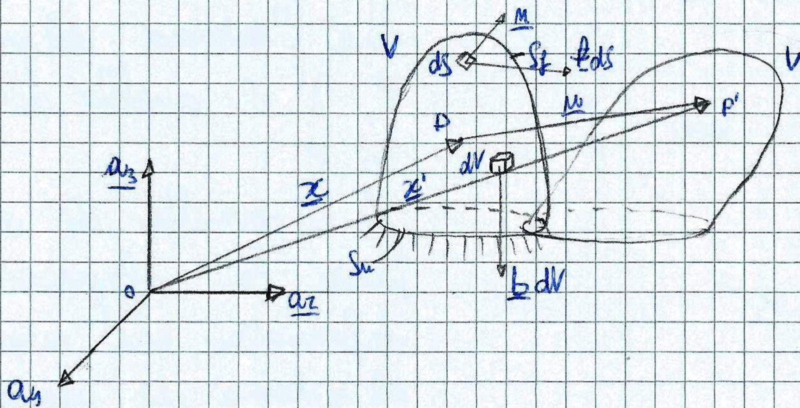
Il continuo di Cauchy

Il secondo modulo del corso di Scienza delle Costruzioni I si concentra sullo studio del continuo di Cauchy

Introduzione del concetto di continuo

Un continuo è un solido deformabile B i cui punti materiali sono in ogni istante in corrispondenza biunivoca con i punti geometrici di una regione regolare dello spazio euclideo.

Vediamo uno schema grafico che ci permette di visualizzare l'evoluzione temporale della deformazione del continuo:



V = configurazione iniziale
V' = configurazione finale
P = punto generico
$\underline{x}$ = posizione materiale iniziale
$\underline{x}'$ = posizione materiale variata
$S = S_u \cup S_f$

Inoltre:

- S_u è vincolata con vincoli lisci e bilateri. Sono possibili spostamenti prescritti $\bar{\underline{u}}(\underline{x})$. I vincoli danno reazioni incognite $\underline{r}(\underline{x})$ $[F/L^2]$;
- S_f è libera e su di essa agiscono forze di superficie $\underline{f}(\underline{x})$ $[F/L^2]$;
- $\underline{b}$ sono le forze di volume $[F/L^3]$

Supponendo la lentissima applicazione delle forze (forze quasi-statiche), possiamo affrontare il problema della deformazione in modo quasi statico e non dinamico.
Definiamo $\underline{u}(\underline{x})$ campo di spostamento che determina la configurazione variata V' a partire da quella iniziale V. Infatti il passaggio da P a P' è descritto dal vettore $\underline{u}$.

La deformazione che ci apprestiamo ad analizzare è prodotta da un campo di spostamento che gode di due ipotesi:

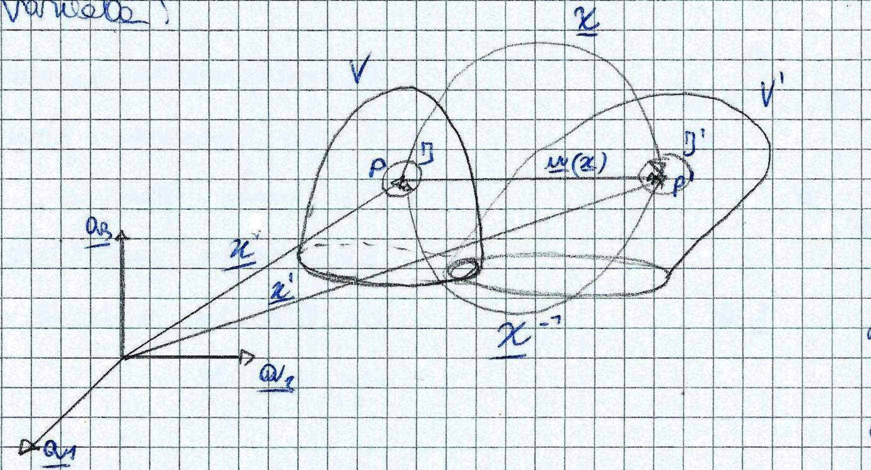
- gradienti del campo infinitesimi
  $\Longrightarrow$ deformazioni infinitesime

- modulo del campo molto minore di una dimensione caratteristica del corpo (della lunghezza di una trave, ad esempio)

$\Longrightarrow$ spostamenti infinitesimi

Con tali ipotesi $V \cong V'$ ed è pertanto possibile applicare lo studio dell'equilibrio statico alla deformazione

Per poter scendere nel dettaglio è necessario introdurre la funzione mappa $\underline{\chi}$ che associa ad ogni punto materiale p il corrispondente punto geometrico p' nella configurazione variata:



I è l'intorno del punto p, I' è quello del punto p'

$\underline{\chi}$ ci permette di identificare la configurazione deformata, cioè, rispetto al sistema di riferimento a_1, a_2, a_3 si ha $\underline{x}' = \underline{\chi}(\underline{x})$

$\underline{\chi}^{-1}$ è l'inversa di $\underline{\chi}$, che ci permette di passare da p' a p.

Qui e nel seguito distingueremo tra la notazione assoluta, cioè l'uso diretto dei vettori indicati con lettere sottolineate, e la notazione in componenti, cioè l'uso delle matrici che esprimono un vettore in relazione a un sistema di riferimento. I tensori (simili ai vettori ma con nove componenti) saranno indicati con una lettera in grassetto.

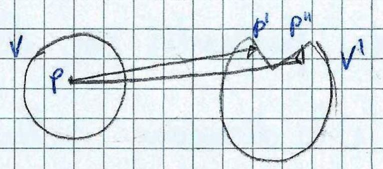
Per poter analizzare le caratteristiche che $\underline{\chi}$ deve possedere ci serve l'introduzione del gradiente del trasporto, che è per definizione:

$$\underline{F} := \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{x}} = [\chi_{i,j}] \qquad i,j = 1,2,3$$

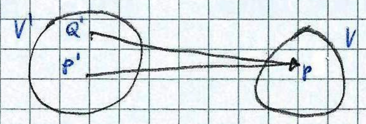
Esso si configura come la matrice jacobiana della trasformazione.

Le condizioni di regolarità per $\underline{\chi}$ sono:

- $\underline{\chi}(\underline{x})$ biiettiva $\Longleftrightarrow \det \underline{F} \neq 0 \quad \forall \underline{x} \in V'$. Pertanto la funzione mappa $\underline{\chi}$ è invertibile cioè esiste $\underline{\chi}^{-1}$. Essendo $\underline{\chi}$ monodroma (assume un solo valore per ogni $\underline{x}$, che è la variabile indipendente e tale valore è diverso da tutti gli altri), non sono ammesse lacerazioni e compenetrazioni;



IMPOSSIBILE PER LA MONOTONIA DI $\underline{\chi}$



IMPOSSIBILE PER LA MONOTONIA DI $\underline{\chi}^{-1}$

- $\underline{\chi}(\underline{x})$ continua con derivate continue. Perciò i punti che si trovano a distanza infinitesima nella configurazione iniziale le rimangono a distanza infinitesima in quella variata ($\underline{\chi}$ continua). Si hanno inoltre superfici regolari, senza punte o tratti angolosi (derivate di $\underline{\chi}$ continue);
- $\det \underline{F} > 0 \quad \forall \underline{x} \in V$. Si può dimostrare che $dV' = \det \underline{F} \cdot dV > 0$ preserva l'orientamento della terna $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

Dal disegno precedente (quello con gli intorni di P e P') si evince che:

$$\underline{u}(\underline{x}) := \underline{x}' - \underline{x} = \underline{\chi}(\underline{x}) - \underline{x} \Rightarrow \underline{\chi}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{u}(\underline{x})$$

Definito $\underline{G}$ gradiente di spostamento:

$$\underline{G} := \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} = [u_{i,j}]$$

e derivando l'equazione rispetto a $\underline{x}$:

$$\frac{\partial \underline{\chi}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \Rightarrow \underline{F}(\underline{x}) = \underline{I} + \underline{G}$$

Se (per ipotesi fatta in precedenza) $\left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right| \ll 1$, allora, risulta la relazione appena ottenuta:

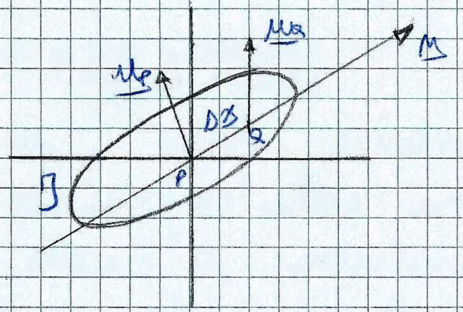
$$\det \underline{F} = 1 + o\left(\left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right|\right)$$ vogliamo $\det \underline{F} > 0$

Se $\det \underline{F} > 0$ sono soddisfatte la locale invertibilità di $\underline{\chi}$ ed è preservato l'orientamento della terna. Abbiamo cioè dimostrato che l'invertibilità di $\underline{\chi}$ è legata a $\det \underline{F}$, essendo lo stesso $\det \underline{F}$ lo jacobiano della trasformazione.

Manca a questo punto l'ultima condizione (la seconda), cioè che $\underline{\chi}(\underline{x})$ sia continua con le sue derivate. È tale se il campo di spostamento $\underline{u}(\underline{x})$ soddisfa le condizioni di continuità e derivabilità. Se sono soddisfatte all'interno del volume del continuo, $\underline{u}(\underline{x})$ si dice internamente cinematicamente ammissibile. Se sono soddisfatte su S_u è esternamente cinematicamente ammissibile. Se sono soddisfatte in entrambi i casi $\underline{u}(x)$ è cinematicamente ammissibile (o congruente).

Il vettore deformazione infinitesima

Consideriamo una "stella" di fibre passanti per il punto P:



$\underline{n}$ è la direzione nella stella per P

$\Delta \underline{x} = \Delta x_n \, \underline{n}$

$\Delta \underline{u} = \underline{u}_Q - \underline{u}_P$

Definiamo il vettore gradiente di spostamento in P nella direzione $\underline{n}$:

$$\underline{g}_n := \lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{\Delta \underline{u}}{\Delta x_n} = \frac{d\underline{u}}{dx_n}$$

È la derivata direzionale del vettore spostamento $\underline{u}$. Lo spostamento è dovuto sia alla deformazione che allo spostamento rigido relativo tra P e Q. Pertanto $\underline{g}_n$ contiene una parte rigida e una deformativa. Non può essere esclusivamente misura della deformazione. Ricordando la formula generale dello spostamento rigido e quanto appreso nel corso di Fisica Matematica:

$$\text{FGSR} \begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases} \Rightarrow \underline{u}_Q = \underline{u}_P + \underline{\omega} \times \Delta \underline{x} = \underline{u}_P + \underline{\omega} \times (Q-P)$$

Definendo $\Delta \underline{u}_R = \underline{\omega} \times \Delta \underline{x}$ abbiamo scoperto la parte rigida della deformazione. Introduciamo il gradiente di spostamento rigido:

$$\underline{w}_n := \lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{\Delta \underline{u}_R}{\Delta x_n} = \underline{\omega} \times \underline{n}$$

Per ottenere la pura deformazione basterà allora sottrarre a $\underline{g}_n$ lo spostamento rigido:

$$\underline{e}_n := \underline{g}_n - \underline{w}_n = \frac{d\underline{u}}{dx_n} - \underline{\omega} \times \underline{n}$$

In cui $\underline{e}_n$ esprime la deformazione ed è nullo per trasformazione rigida

La rotazione rigida

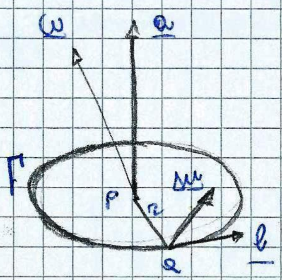
La rotazione media delle fibre è dovuta alla parte rigida della trasformazione ed è rappresentata da ω:

$$e_n = \frac{du}{\partial x_n} - \omega \times n$$

Per estrarre ω dobbiamo eseguire la seguente media

$$\omega \cdot a = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r} \oint_\Gamma \Delta u \cdot l \cdot \frac{1}{r}\, ds = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \oint_\Gamma \Delta u \cdot ds$$

In cui a è l'asse di rotazione. Il suo prodotto scalare con ω rappresenta la rotazione media delle fibre ed è pari all'integrale di tutte le singole rotazioni $\Delta u \cdot l$ mediate sull'intera circonferenza $2\pi r$. Si applica ora il teorema del rotore o di Stokes ($\oint_\Gamma v \cdot ds = \int_S \nabla \times v \cdot n \, dS$) e si ottiene:



$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \oint_\Gamma \Delta u \cdot ds = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \left[\oint_\Gamma u_Q \cdot ds - \underbrace{\cancel{\oint_\Gamma u_P \cdot ds}}_{=0} \right] =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \oint u_Q \cdot ds = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \int_{S_0} \nabla \times u_Q \cdot a \, dS =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \nabla \times u_Q \cdot a \int_{S_0} dS \quad \lim_{r\to 0} \frac{\nabla \times u_Q \cdot a}{2\pi r^2} \pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \nabla \times u_Q \cdot a$$

Se $\omega \cdot a = \frac{1}{2} \nabla \times u_Q \cdot a \Longrightarrow \omega = \frac{1}{2} \nabla \times u_Q$, cioè ω dipende da u_Q

Per determinare w_n si parte dunque dai due vettori ω e n.
È tuttavia possibile associare a w_n un tensore, detto tensore rotazione rigida e indicato con W. Esso possiede nove componenti e va moltiplicato per n:

$$w_n = \omega \times n = W \cdot n \quad \text{in cui } W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & +\omega_2 \\ +\omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & +\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

È un tensore emisimmetrico e rappresenta la rotazione infinitesima. Se si esprimono le sue componenti rispetto agli assi a_1, a_2, a_3 si ottiene un oggetto a tre componenti detto "pseudo-vettore":

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i a_i$$

Si parla anche di vettore assiale

Usando la rotazione rigida concepita come media delle rotazioni nel punto:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{u} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \underline{a_1} & \underline{a_2} & \underline{a_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[\underline{a_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \underline{a_2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \right.$$

$$\left. + \underline{a_3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underline{a_1} (u_{3,2} - u_{2,3}) + \underline{a_2} (u_{1,3} - u_{3,1}) + \underline{a_3} (u_{2,1} - u_{1,2}) \right]$$

Perciò:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} (u_{3,2} - u_{2,3}) \qquad \omega_2 = \frac{1}{2} (u_{1,3} - u_{3,1}) \qquad \omega_3 = \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2})$$

In generale:

$$\omega_k = -\frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad \text{con } i,j,k = 1,2,3$$

Il meno è necessario per soddisfare la circuitazione su i,j,k

Quindi concludendo:

$$W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} - u_{2,1} & u_{1,3} - u_{3,1} \\ & 0 & u_{2,3} - u_{3,2} \\ \text{ANTISIMMETRICA} & & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[u_{i,j} - u_{j,i} \right]$$

In cui $(u_{i,j} - u_{j,i})$ è la componente i,j di W. Fisicamente il tensore rappresenta elongazioni e distorsioni